4章　微分方程式

§1　1階微分方程式　(p.105〜p.106)

練習問題 1-A

1. (1) (変数分離形)

両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{1}{t+1}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\log|t+1|+c$$
$$\log|x|-\log|t+1|=c$$
$$\log\left|\frac{x}{t+1}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t+1}\right|=e^c$$
$$\frac{x}{t+1}=\pm e^c$$
$$x=\pm e^c(t+1)$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=C(t+1)}$　(C は任意定数)

(2) (変数分離形)

両辺を $\dfrac{x^2-1}{x}$ で割ると

$$\frac{x}{x^2-1}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{x}{x^2-1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$\int\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,dx=2\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x^2-1|=2\log|t|+c$$
$$\log|x^2-1|-\log|t|^2=c$$
$$\log\frac{|x^2-1|}{t^2}=c$$

よって

$$\frac{|x^2-1|}{t^2}=e^c$$
$$|x^2-1|=e^ct^2$$
$$x^2-1=\pm e^ct^2$$
$$x^2=\pm e^ct^2+1$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x^2=Ct^2+1}$　(C は任意定数)

(3) (同次形)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\cdot\left(\frac{x}{t}\right)^2-1}{2\cdot\frac{t}{x}}$$

$u=\dfrac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{2u^2-1}{2u}=u-\frac{1}{2u}$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{2u}$

$2u\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int 2u\,du=-\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$u^2=-\log|t|+C$　(C は任意定数)

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2=-\log|t|+C$$
$$\frac{x^2}{t^2}=-\log|t|+C$$

$$\boldsymbol{x^2=t^2(-\log|t|+C)}$$

(C は任意定数)

(4) (同次形)

$$\frac{dx}{dt}=2\cdot\frac{x}{t}+1$$

$u=\dfrac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=2u+1$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=u+1$

$\dfrac{1}{u+1}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{u+1}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$\log|u+1|=\log|t|+c$　(C は任意定数)

$$\log|u+1|-\log|t|=c$$
$$\log\left|\frac{u+1}{t}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{u+1}{t}\right|=e^c$$
$$\frac{u+1}{t}=\pm e^c$$
$$u+1=\pm e^ct$$
$$u=\pm e^ct-1$$

$C=\pm e^c$ とおくと，$u=Ct-1$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t}=Ct-1$$

$$\boldsymbol{x=t(Ct-1)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（5）（1 階線形）

i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x=0$$
$$\frac{dx}{dt}=-x$$
$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int dt$$

これより

$$\log|x|=-t+c \quad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$|x|=e^{-t+c}$$
$$=e^ce^{-t}$$
$$x=\pm e^ce^{-t}$$

$\pm e^c=C$ とおくと，$x=Ce^{-t}$

ii）　$x=ue^{-t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{-t}-ue^{-t}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{-t}-ue^{-t}+ue^{-t}=te^{-t}$$
$$\frac{du}{dt}e^{-t}=te^{-t}$$
$$\frac{du}{dt}=t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int t\,dt$$

これより

$$u=\frac{1}{2}t^2+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$\boldsymbol{x=\left(\frac{1}{2}t^2+C\right)e^{-t}}$$

（C は任意定数）

〔別解〕

$$\int dt=t$$

方程式の両辺に，e^t をかけると

$$e^t\frac{dx}{dt}+e^tx=te^{-t}e^t$$
$$(e^tx)'=t$$

よって

$$e^tx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$\boldsymbol{x=\left(\frac{1}{2}t^2+C\right)e^{-t}}$$

（C は任意定数）

（6）（1 階線形・同次形）

i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}-\frac{x}{2t}=0$$
$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\frac{1}{2}\log|t|+c$$

（c は任意定数）

$$\log|x|-\log\sqrt{t}=c \quad (t>0 \text{ より})$$
$$\log\frac{|x|}{\sqrt{t}}=c$$

よって

$$\frac{|x|}{\sqrt{t}}=e^c$$
$$|x|=e^c\sqrt{t}$$
$$x=\pm e^c\sqrt{t}$$

$\pm e^c=C$ とおくと，$x=C\sqrt{t}$

（C は任意定数）

ii）　$x=u\sqrt{t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\sqrt{t}+\frac{u}{2\sqrt{t}}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}\sqrt{t}+\frac{u}{2\sqrt{t}}-\frac{u\sqrt{t}}{2t}=1$$
$$\frac{du}{dt}\sqrt{t}=1$$
$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

これより

$$u=2\sqrt{t}+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$x=\left(2\sqrt{t}+C\right)\sqrt{t}$，すなわち

$$\boldsymbol{x=2t+C\sqrt{t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔別解〕

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\frac{x}{t}+1$$

$u=\dfrac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$u+t\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{2}u+1$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{2}u+1$

$\dfrac{1}{u-2}\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{2t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{u-2}\,du=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt$

これより

$\log|u-2|=-\dfrac{1}{2}\log t+c$（$c$ は任意定数）

$\log|u-2|+\log\sqrt{t}=c$ （$t>0$ より）

$\log|u-2|\sqrt{t}=c$

よって

$|u-2|\sqrt{t}=e^c$

$(u-2)\sqrt{t}=\pm e^c$

$u-2=\pm e^c\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$u=\pm e^c\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}+2$

$C=\pm e^c$ とおくと，$u=\dfrac{C}{\sqrt{t}}+2$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$\dfrac{x}{t}=\dfrac{C}{\sqrt{t}}+2$

$x=t\left(\dfrac{C}{\sqrt{t}}+2\right)$

$\boldsymbol{x=2t+C\sqrt{t}}$ （C は任意定数）

〔別解〕

$\displaystyle\int\left(-\frac{1}{2t}\right)dt=-\frac{1}{2}\log|t|$

$\displaystyle=\log\frac{1}{\sqrt{t}}$ （$t>0$ より）

ここで，$e^{\log\frac{1}{\sqrt{t}}}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

方程式の両辺に，$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ をかけると

$\dfrac{1}{\sqrt{t}}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}x=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

よって

$\displaystyle\frac{x}{\sqrt{t}}=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$=2\sqrt{t}+C$ （C は任意定数）

したがって

$x=(2\sqrt{t}+C)\sqrt{t}$，すなわち

$\boldsymbol{x=2t+C\sqrt{t}}$ （C は任意定数）

2. （1）（変数分離形）

両辺を x^2 で割ると

$\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dx}{dt}=4t^3$

両辺を t について積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,dx=\int 4t^3\,dt$

これより

$-\dfrac{1}{x}=t^4+C$ （C は任意定数）

これに，$t=0$，$x=1$ を代入すると

$-1=0^4+C$

$C=-1$ よって

$-\dfrac{1}{x}=t^4-1$

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{t^4-1}}$$

（2）（変数分離形）

両辺を x^2+1 で割ると

$\dfrac{1}{x^2+1}\dfrac{dx}{dt}=1$

両辺を t について積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int dt$

これより

$\tan^{-1}x=t+C$ （C は任意定数）

これに，$t=0$，$x=1$ を代入すると

$\tan^{-1}1=0+C$

$C=\dfrac{\pi}{4}$ よって

$\tan^{-1}x=t+\dfrac{\pi}{4}$

$$\boldsymbol{x=\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

（3）（同次形）

$\dfrac{dx}{dt}=\left(\dfrac{x}{t}\right)^2+\dfrac{x}{t}$

$u=\dfrac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$\dfrac{dx}{dt}=u+t\dfrac{du}{dt}$

これを与えられた微分方程式に代入して

$u+t\dfrac{du}{dt}=u^2+u$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=u^2$

$\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{u^2}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$

これより

$-\dfrac{1}{u}=\log|t|+C$ （C は任意定数）

$u=-\dfrac{1}{\log|t|+C}$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$\dfrac{x}{t}=-\dfrac{1}{\log|t|+C}$

$x=-\dfrac{t}{\log|t|+C}$

これに，$t=1$，$x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{\log 1+C}$

$C=-2$

よって，$x=-\dfrac{t}{\log|t|-2}$

すなわち，$\boldsymbol{x=\dfrac{t}{2-\log|t|}}$

（4）（1 階線形）

i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x\sin t=0$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\sin t$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\sin t\,dt$$

これより

$$\log|x|=\cos t+c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$|x|=e^{\cos t+c}$$

$$=e^{c}e^{\cos t}$$

$$x=\pm e^{c}e^{\cos t}$$

$\pm e^{c}=C$ とおくと，$x=Ce^{\cos t}$

(C は任意定数)

ii）　$x=ue^{\cos t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{\cos t}-ue^{\cos t}\sin t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{\cos t}-ue^{\cos t}\sin t+ue^{\cos t}\sin t=e^{\cos t}$$

$$\frac{du}{dt}e^{\cos t}=e^{\cos t}$$

$$\frac{du}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int dt$$

これより

$$u=t+C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$x=(t+C)e^{\cos t}$$

これに，$t=\dfrac{\pi}{2}$，$x=0$ を代入すると

$$0=\left(\frac{\pi}{2}+C\right)e^{\cos\frac{\pi}{2}}$$

すなわち，$C=-\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\boldsymbol{x=\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)e^{\cos t}}$

〔一般解の求め方の別解〕

$$\int\sin t\,dt=-\cos t$$

方程式の両辺に，$e^{-\cos t}$ をかけると

$$e^{-\cos t}\frac{dx}{dt}+e^{-\cos t}\sin t\cdot x=1$$

$$(e^{-\cos t}x)'=1$$

よって

$$e^{-\cos t}x=\int dt$$

$$=t+C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$x=(t+C)e^{\cos t} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

3.（1）

$$t\frac{dx}{dt}=-x$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x|=-\log|t|+c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|x|+\log|t|=c$$

$$\log|xt|=c$$

よって

$$|xt|=e^{c}$$

$$xt=\pm e^{c}$$

$$x=\pm e^{c}\cdot\frac{1}{t}$$

$\pm e^{c}=C$ とおくと，$\boldsymbol{x=\dfrac{C}{t}}$

(C は任意定数)

（2）$x=\dfrac{u}{t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{1}{t}-\frac{u}{t^2}$$

微分方程式に代入すると

$$t\left(\frac{du}{dt}\frac{1}{t}-\frac{u}{t^2}\right)+\frac{u}{t}=\frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{du}{dt}-\frac{u}{t}+\frac{u}{t}=\frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{t}{1+t^2}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int\frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int du=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\,dt$$

これより

$$u=\frac{1}{2}\log(1+t^2)+C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\log(1+t^2)+C\right\}}$$

(C は任意定数)

4.

$$\frac{di}{dt}=-i+E$$

$$\frac{1}{i-E}\frac{di}{dt}=-1$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{i-E}\,di = -\int dt$$

これより

$$\log|\,i-E\,| = -t+c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$|\,i-E\,| = e^{-t+c}$$

$$i-E = \pm e^c e^{-t}$$

$C=\pm e^c$ とおくと，$i = Ce^{-t}+E$

これに，$t=0$，$i=0$ を代入すると

$$0 = Ce^0 + E$$

$$C = -E$$

よって

$$i = -Ee^{-t}+E$$

$$\boldsymbol{i = E(1-e^{-t})}$$

練習問題 1-B

1. (1) $u=\sqrt{2t+x+4}$ より，$u \geqq 0$

また，両辺を t で微分すると

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2t+x+4}}\cdot(2t+x+4)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2t+x+4}}\cdot\left(2+\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2u}(2+u)$$

よって，$\boldsymbol{2u\dfrac{du}{dt} = u+2}$

(2)

$$2u\frac{du}{dt} = u+2$$

$$\frac{2u}{u+2}\,\frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{2(u+2)-4}{u+2}\,\frac{du}{dt} = 1$$

$$2\left(1-\frac{2}{u+2}\right)\frac{du}{dt} = 1$$

両辺を t について積分すると

$$2\int\left(1-\frac{2}{u+2}\right)du = \int dt$$

これより

$$2\{u-2\log(u+2)\} = t+C$$

(C は任意定数)

$$2u-4\log(u+2) = t+C$$

よって

$$\boldsymbol{2\sqrt{2t+x+4} - 4\log(\sqrt{2t+x+4}+2) = t+C}$$

(C は任意定数)

2. (1) 与式の両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + t\frac{d^2x}{dt^2} + 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

よって

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left(t+3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 0$$

(2) i) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = C$$

よって，一般解は，これを与えられた微分方程式に代入して，$\boldsymbol{x = tC + C^3}$

ii) $t+3\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = 0$ のとき

$$t = -3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdots ①$$

これを，与えられた微分方程式に代入すれば

$$x = -3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$= -2\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 \cdots ②$$

①の両辺を 3 乗すると

$$t^3 = -27\left(\frac{dx}{dt}\right)^6$$

②の両辺を 2 乗すると

$$x^2 = 4\left(\frac{dx}{dt}\right)^6$$

この 2 式より，$-\dfrac{t^3}{27} = \dfrac{x^2}{4}$

よって，特異解は，$\boldsymbol{x^2 = -\dfrac{4}{27}t^3}$

3. (1) $z = x^{-2}$ の両辺を t で微分すると

$$\frac{dz}{dt} = -2x^{-3}\frac{dx}{dt}$$

よって

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^3}{2}\,\frac{dz}{dt}$$

これを与えられた方程式に代入すると

$$t\left(-\frac{x^3}{2}\,\frac{dz}{dt}\right) - 2x = t^2x^3$$

$$-t\frac{x^2}{2}\,\frac{dz}{dt} - 2 = t^2x^2$$

$x^2 = z^{-1}$ なので

$$-t\frac{z^{-1}}{2}\,\frac{dz}{dt} - 2 = t^2\cdot z^{-1}$$

$$\boldsymbol{t\frac{dz}{dt} + 4z = -2t^2}$$

(2) z についての微分方程式を解く．

$t\dfrac{dz}{dt} + 4z = -2t^2$ より

$$\frac{dz}{dt} + \frac{4z}{t} = -2t$$

i) 斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dz}{dt} + \frac{4z}{t} = 0$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}=-\frac{4}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{z}\,dx=-4\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|z|=-4\log|t|+c$$

(c は任意定数)

$$\log|z|+\log|t|^4=c$$

$$\log|z|t^4=c$$

よって

$$|z|t^4=e^c$$

$$zt^4=\pm e^c$$

$$z=\pm\frac{e^c}{t^4}$$

$\pm e^c=C$ とおくと，$z=\dfrac{C}{t^4}$

(C は任意定数)

ii） $z=\dfrac{u}{t^4}=ut^{-4}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dz}{dt}=\frac{du}{dt}t^{-4}-4ut^{-5}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}t^{-4}-4ut^{-5}+\frac{4ut^{-4}}{t}=-2t$$

$$\frac{du}{dt}=-2t^5$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=-2\int t^5\,dt$$

これより

$$u=-\frac{1}{3}t^6+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

よって

$$z=ut^{-4}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}t^6+c}{t^4}$$

$$=\frac{-t^6+3c}{3t^4}$$

$3c=C$ とおくと

$$z=\frac{-t^6+C}{3t^4}$$

$z=\dfrac{1}{x^2}$ であるから

$$\frac{1}{x^2}=\frac{-t^6+C}{3t^4}$$

$$\boldsymbol{x^2(-t^6+C)=3t^4}$$

(C は任意定数)

〔z の一般解の求め方の別解〕

$$\int\frac{4}{t}\,dt=4\log|t|=\log t^4$$

ここで，$e^{\log t^4}=t^4$

$\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{4z}{t}=-2t$ の両辺に，t^4 かけると

$$t^4\frac{dz}{dt}+4t^3z=-2t^5$$

$$(t^4z)'=-2t^5$$

よって

$$t^4z=\int(-2t^5)\,dt$$

$$=-\frac{1}{3}t^6+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

したがって

$$z=\frac{-\frac{1}{3}t^6+c}{t^4}$$

$$=\frac{-t^6+3c}{3t^4}$$

4. （1） $x=t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=1$

これを微分方程式に代入すると

$$\text{左辺}=1+(2t^2+1)t-t\cdot t^2$$

$$=1+2t^3+t-t^3$$

$$=t^3+t+1=\text{右辺}$$

（2） $u=\dfrac{1}{x-t}$ より，$x-t=\dfrac{1}{u}$

すなわち，$x=t+\dfrac{1}{u}$ であるから

$$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

これを，微分方程式に代入して

$$1-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+(2t^2+1)\left(t+\frac{1}{u}\right)-t\left(t+\frac{1}{u}\right)^2=t^3+t+1$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+2t^3+\frac{2t^2}{u}+t+\frac{1}{u}-t\left(t^2+\frac{2t}{u}+\frac{1}{u^2}\right)=t^3+t$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+2t^3+\frac{2t^2}{u}+t+\frac{1}{u}-t^3-\frac{2t^2}{u}-\frac{t}{u^2}=t^3+t$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}+\frac{1}{u}-\frac{t}{u^2}=0$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{du}{dt}-u=-t}$

（3） $\dfrac{du}{dt}-u=-t$ を解く．

i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{du}{dt}-u=0$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{u}\,dx=\int dt$$

これより

$$\log|u|=t+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

よって

$$|u|=e^{t+c}$$

$$u=\pm e^{t+c}=\pm e^ce^t$$

$\pm e^c=C$ とおくと，$u=Ce^t$

(C は任意定数)

ii） $u = ve^t$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}e^t + ve^t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{dv}{dt}e^t + ve^t - ve^t = -t$$

$$\frac{dv}{dt} = -te^{-t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int dv = -\int te^{-t}\,dt$$

$$v = -\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right)$$

$$= te^{-t} + e^{-t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$u = ve^t$$

$$= (te^{-t} + e^{-t} + C)e^t$$

$$= t + 1 + Ce^t$$

したがって

$$x = t + \frac{1}{u}$$

$$= \boldsymbol{t + \frac{1}{Ce^t + t + 1}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔u の一般解の求め方の別解〕

$$\int (-1)\,dt = -t$$

$\dfrac{du}{dt} - u = -t$ の両辺に，e^{-t} かけると

$$e^{-t}\frac{du}{dt} - e^{-t}u = -e^{-t}t$$

$$(e^{-t}u)' = -e^{-t}t$$

よって

$$e^{-t}u = -\int e^{-t}t\,dt$$

$$= -\left(-e^{-t}t + \int e^{-t}\,dt\right)$$

$$= -(-e^{-t}t - e^{-t}) + C$$

$$= e^{-t}t + e^{-t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$u = e^t(e^{-t}t + e^{-t} + C)$$

$$= t + 1 + Ce^t$$

∎